2 月の和算研究会（2 月 9 日）

今月の勉強会の主な内容

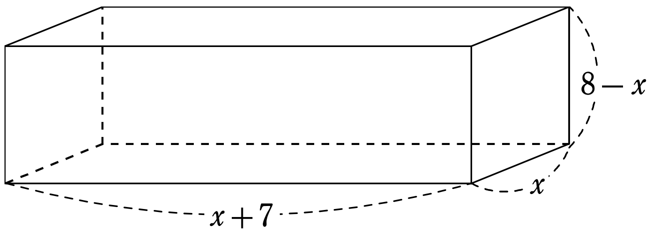
1. 組立除法と接線の方程式
2. 算法助術 82，83 の解法

1．組立除法と接線の方程式

<u>建部賢弘の示した最大値を求める問題</u>

術理四条の第二探直堡求積術　第六に

$$\boxed{\text{假如直堡，長濶差七尺，濶高和八尺，欲使積至多，問長濶高及極積各幾何}}$$



＊濶：長方形の短い辺をいう。

体積Vは，$V=x(x+7)(8-x)=-x^3+x^2+56x$となる。

$f(x)=-x^3+x^2+56x$を$x-\alpha$で割る。

組立除法で求めると

α）-1	1	56	0
	$-\alpha$	$-\alpha^2+\alpha$	$-\alpha^3+\alpha^2+56\alpha$
-1	$-\alpha+1$	$-\alpha^2+\alpha+56$	$\boxed{-\alpha^3+\alpha^2+56\alpha}$
	$-\alpha$	$-2\alpha^2+\alpha$	
-1	$-2\alpha+1$	$\boxed{-3\alpha^3+2\alpha+56}$	
	$-\alpha$		
-1	$\boxed{-3\alpha+1}$		

よって，

$$V=-(x-\alpha)^3+(1-3\alpha)(x-\alpha)^2+(-3\alpha^2+2\alpha+56)(x-\alpha)+(-\alpha^3+\alpha^2+56\alpha)$$

となる。

1次の項と定数項に注目すると

$y=(-3\alpha^2+2\alpha+56)(x-\alpha)+(-\alpha^3+\alpha^2+56\alpha)$となる。

$-3\alpha^2+2\alpha+56=(3\alpha-14)(\alpha+4)=0$とすると，

$\alpha=\dfrac{14}{3}$，-4

よって体積が最大のときは，$\alpha=\dfrac{14}{3}$のときで，体積は$V=181.481481\cdots$

建部は，組立除法を用いることで現代の微分を行い極大値を求めていた。

三次関数を一般化して，組立除法と微分の関係を考察する。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$**を**$x-\alpha$**で割る。**

組立除法で求めると

$$\begin{array}{lllll}
\alpha) & a & b & c & d \\
 & & a\alpha & a\alpha^2+b\alpha & a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha \\ \hline
 & a & a\alpha+b & a\alpha^2+b\alpha+c & \boxed{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=f(\alpha) \\
 & & a\alpha & 2a\alpha^2+b\alpha & \\ \cline{1-4}
 & a & 2a\alpha+b & \boxed{3a\alpha^3+2b\alpha+c}=f'(\alpha) & \\
 & & a\alpha & & \\ \cline{1-3}
 & a & \boxed{3a\alpha+b}=\dfrac{f''(\alpha)}{2!} & &
\end{array}$$

よって，

$$f(x)=a(x-\alpha)^3+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$ **となる。**

1次の項と定数項に注目すると

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

は， $y=f(x)$**の**$x=\alpha$**における接線の方程式であることが分かる。**

具体例

$f(x)=x^3+2x^2+x+3$**を**$x-1$**で割る。**

組立除法で求めると

$$\begin{array}{lllll}
1) & 1 & 2 & 1 & 3 \\
 & & 1 & 3 & 4 \\ \hline
 & 1 & 3 & 4 & \boxed{7}=f(1) \\
 & & 1 & 4 & \\ \cline{1-4}
 & 1 & 4 & \boxed{8}=f'(1) & \\
 & & 1 & & \\ \cline{1-3}
 & 1 & \boxed{5}=\dfrac{f''(1)}{2!} & &
\end{array}$$

よって，

$$f(x)=(x-1)^3+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+f'(1)(x-1)+f(1)=(x-1)^3+5(x-1)^2+8(x-1)+7$$

となる。

1次の項と定数項に注目すると

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=8(x-1)+7=8x-1$

は， $y=f(x)$**の**$x=1$**における接線の方程式であることが分かる。**

二次関数の頂点の座標の求め方

$f(x)=ax^2+bx+c$を$x-\alpha$で割る。組立除法を行い，接線の方程式を求める。

$$
\begin{array}{l|lll}
\alpha) & a & b & c \\
 & & a\alpha & a\alpha^2+b\alpha \\
\hline
 & a & a\alpha+b & \boxed{a\alpha^2+b\alpha+c}=f(\alpha) \\
 & & a\alpha & \\
\hline
 & a & \boxed{2a\alpha+b}=f'(\alpha) &
\end{array}
$$

$f(x)=a(x-\alpha)^2+f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

$\quad=a(x-\alpha)^2+(2a\alpha+b)(x-\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c\cdots$①

接線の方程式は，$y=(2a\alpha+b)(x-\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$

接線の傾きが0の場合（二次関数の頂点を通る接線）

$f'(\alpha)=2a\alpha+b=0$

$$\alpha=-\frac{b}{2a}$$

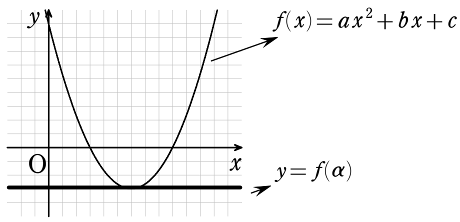
よって，αは$f(x)$の頂点のx座標となる。

①より，接線の傾きが0なので，$f(x)=a(x-\alpha)^2+a\alpha^2+b\alpha+c\cdots$②となる。

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}$を②に代入すると

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

が得ることができる。



$f(x)=x^2+2x+3$を$x-\alpha$で割る。組立除法を行い，接線の方程式を求める。

$$
\begin{array}{l|lll}
\alpha) & 1 & 2 & 3 \\
 & & \alpha & \alpha^2+2\alpha \\
\hline
 & 1 & \alpha+2 & \boxed{\alpha^2+2\alpha+3}=f(\alpha) \\
 & & \alpha & \\
\hline
 & 1 & \boxed{2\alpha+2}=f'(\alpha) &
\end{array}
$$

$f(x)=(x-\alpha)^2+f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

$\quad=(x-\alpha)^2+(2\alpha+2)(x-\alpha)+\alpha^2+2\alpha+3\cdots$①

接線の方程式は，$y=(2\alpha+2)(x-\alpha)+\alpha^2+2\alpha+3$

接線の傾きが0の場合（二次関数の頂点を通る接線）

$f'(\alpha)=2\alpha+2=0$

$$\alpha=-\frac{2}{2}=-1$$

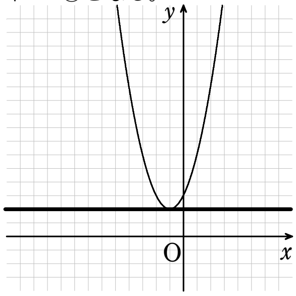
よって，αは$f(x)$の頂点のx座標となる。

①より，接線の傾きが0なので，$f(x)=(x-\alpha)^2+\alpha^2+2\alpha+3\cdots$②となる。

$\alpha=-1$を②に代入すると

$f(x)=(x+1)^2+2$

を得ることができる。

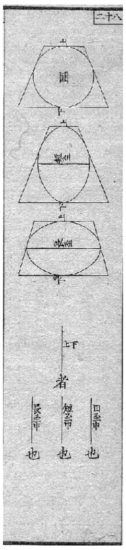


2．算法助術 82，83 の解法

算法助術 82，83 の公式を現代解で証明を行った。

算法助術 82

原文

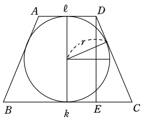


現代文

図のように上底が ℓ，下底が k である等脚台形に

(1) 半径が r の円が内接している

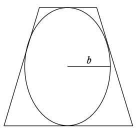
$\ell\ k=4r^2$



【図８２－１】

(2) 短軸が $2b$ の楕円が内接している

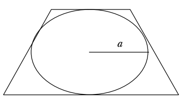
$\ell\ k=4b^2$



【図８２－２】

(3) 長軸が $2a$ の楕円が内接している

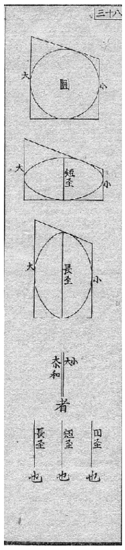
$\ell\ k=4a^2$



【図８２－３】

算法助術 83

原文

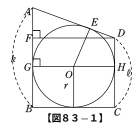


現代文

図のように左側面が k で，右側面が ℓ の台形に

(1) 半径がrの円が内接している．

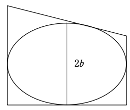
$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{k}=\frac{1}{r}$$



【図８３－１】

(2) 短軸が$2b$の楕円が内接している．

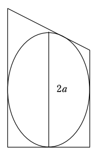
$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{k}=\frac{1}{b}$$



【図８３－２】

(3) 長軸が$2a$の楕円が内接している．

$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{k}=\frac{1}{a}$$



【図８３－３】

○算法助術 82 の解法について

(1) の $\boxed{\text{証明}}$

$DC=\frac{l}{2}+\frac{k}{2}\quad EC=\frac{k}{2}-\frac{l}{2}\quad DE=2r$

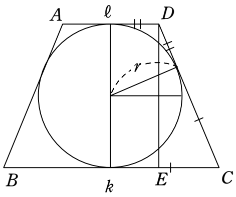
三平方の定理より

$DE^2+EC^2=DC^2$

$(2r)^2+\left(\frac{k}{2}-\frac{l}{2}\right)^2=\left(\frac{k}{2}+\frac{l}{2}\right)^2$

$4r^2=l\times k$

$lk=4r^2$ $\boxed{\text{終}}$



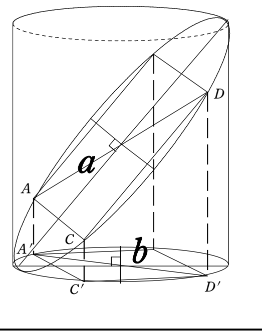
(2)の証明では，楕円を短軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍，(3)の証明では，長軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍することで円に変えて(1)の式を用いることで証明を行う。

和算では，楕円を円に変えて解く方法が多く使われている。円柱を斜めに切断した切り口が楕円となり，楕円を正射影すれば円柱の底面に写すことができる。

切り口の平面と底面をなす角をθ，楕円が外接する等脚台形の上底を l'，円が外接する等脚台形の上底を l とすると

$l'\times\cos\theta=l$

である。また，$\cos\theta=\dfrac{b}{a}$ なので，$l=\dfrac{b}{a}l'$ となる。



（２）の証明

【図８２－２】の等脚台形の上底，下底をそれぞれl'，k'として，楕円の長径を$2a$，短径を$2b$とする。

短軸方向に$\dfrac{a}{b}$倍すると

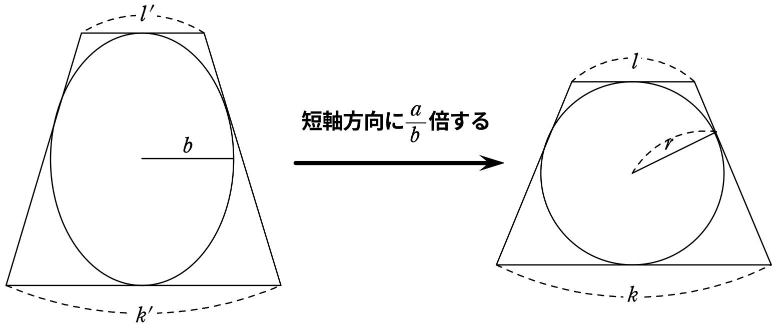
$l=\dfrac{a}{b}l'$　$k=\dfrac{a}{b}k'$　$r=\dfrac{a}{b}\times b=a$

（１）で求めた$lk=4r^2$に代入して，整理すると

$4a^2=\dfrac{a^2}{b^2}l'\times k'$

$4b^2=l'\times k'$

$l'k'=4b^2$　　　　　終



【図８２－２】

（３）の証明

【図８２－３】の等脚台形の上底，下底をそれぞれl'，k'として，楕円の長径を$2a$，短径を$2b$とする。

長軸方向に$\dfrac{b}{a}$倍すると

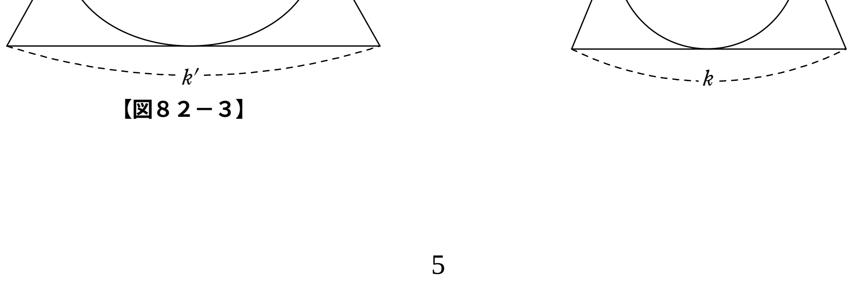
$l=\dfrac{b}{a}l'$　$k=\dfrac{b}{a}k'$　$r=\dfrac{b}{a}\times a=b$

（１）に代入して，整理すると

$4b^2=\dfrac{b^2}{a^2}l'\times k'$

$4a^2=l'\times k'$

$l'k'=4a^2$



【図８２－３】